Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Stetigkeit**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1) *Stetigkeit nachweisen mit ε-δ-Kriterium*
Zeigen Sie mithilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die folgenden Funktionen stetig in den angegebenen Definitionsbereichen sind.

i) $f_1(x) = 2x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$

ii) $f_2(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

iii) $f_3(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty)$

Aufgabe 2 (3) *Beweis mit ε-δ-Kriterium*
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 0$. Zusätzlich gelte $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 3 (2) *Stetigkeit stückweise definierter Funktionen*
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{vermöge} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^2 - 1}, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, +1\} \\ \alpha, & \text{falls } x = -1 \\ \beta, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x)$ in $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 4 (3) *Dirichletsche Sprungfunktion*
Eine bezueglich ihrer Stetigkeit besonders interessante Funktion ist die sogenannte Dirichlet-Sprungfunktion:

$$f_d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{vermöge} \quad f_d(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

i) Beweisen Sie, dass die Dirichlet-Sprungfunktion in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Sei nun $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$|f(x)| \leq |x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Beweisen Sie, dass $f(x)$ in $x_0 = 0$ stetig ist.

iii) Untersuchen Sie nun die der folgende Funktion auf Stetigkeit:

$$\tilde{f}_d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{vermöge} \quad \tilde{f}_d(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

Aufgabe 5 (3) *Fixpunkte von Iterationsfolgen*
Sei die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig.
Zeigen Sie, dass dann für beliebiges $x_0 \in [a, b]$ die Iterationsfolge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} := f(x_n)$:

i) monoton ist (Fallunterscheidung!).

ii) gegen einen Grenzwert ξ konvergiert.

iii) $f(\xi) = \xi$ gilt.

Aufgabe 6 (3) *Zusammenhang gleichmäßige und punktweise Stetigkeit*
Beweisen Sie:
Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die gleichmäßig stetig (auf D) ist, ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Aufgabe 7 (2) *Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit*
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit in den angegebenen Definitionsbereichen:

i) $f_1(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0,1]$

ii) $f_2(x) = x^2, \quad x \in [-1,1]$

iii) $f_3(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R}$

iv) $f_4(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0,1]$

v) $f_5(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

vi) $f_6(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$

vii) $f_7(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 8 (3) *Lipschitzstetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit*
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig, d.h. es existiert eine Zahl $L \in [0,\infty)$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie, dass $f(x)$ dann auch in $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 9 (3) *Vererbung der Stetigkeit*
Es seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Beweisen Sie, dass dann folgende Funktionen ebenfalls stetig in $x_0 \in D$ sind:

i) $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

ii) $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$

iii) $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$

iv) $(|f|)(x) := |f(x)|$

v) $(fg)(x) := f(x)g(x)$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, g \neq 0$ für alle $x \in D$

vii) $\max\{f(x), g(x)\} := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq g(x) \\ g(x), & \text{sonst} \end{cases}$

viii) $\min\{f(x), g(x)\} := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \leq g(x) \\ g(x), & \text{sonst} \end{cases}$

ix) $g \circ f(x) = g(f(x))$

Wobei für die letzte Teilaufgabe ix) gelte $f : D \longrightarrow E$ ist stetig in $x_0 \in D$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $y_0 := f(x_0)$.

Aufgabe 10 (2) *Fundamentalsatz von Weierstraß*
Laut dem Fundamentalsatz von Weierstraß ist eine auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}$ definierte, stetige Funktion $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und besitzt sowohl ein Minimum als auch ein Maximum.
Finden Sie jeweils ein Beispiel für ein offenes, ein halboffenes und unbeschränktes Gebiet, sowie zugehörige Funktionen, die unbeschränkt sind (bzw. ihre Extremwerte nicht annehmen).

Aufgabe 11 (3) *Gleichheit stetiger Funktionen*
Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft:

$$f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}.$$

Beweisen Sie, dass dann gilt

$$f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 12 (3) *Fixpunkte stetiger Funktionen*
Es seien $a < b$ reelle Zahlen.
Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$, einen *Fixpunkt* besitzt, d.h. es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit der Eigenschaft

$$f(\xi) = \xi.$$

Aufgabe 13 (3) *Lösbarkeit nicht-trivialer Funktionalgleichungen*
Untersuchen Sie, ob es für die folgenden Gleichungen jeweils eine reelle Zahl $x > 0$ gibt, die die folgende Gleichung erfüllt:

i) $e^{\sqrt{x}} = \sin(x) + 2$

ii) $e^x = x + 1$

Aufgabe 14 (3) *Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen*
Untersuchen Sie die Funktionenfolge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ der stetigen Funktionen

$$f_k(x) := x^k \quad x \in [0, 1]$$

auf Konvergenz. Existiert eine Grenzfunktion? Falls ja, liegt nur punktweise oder sogar gleichmäßige Konvergenz vor?